

# ESFUERZOS MECÁNICOS. COMPOSICIÓN Y REPRESENTACIÓN DE ESFUERZOS. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PIEZAS SIMPLES

## 1 RESISTENCIA DE MATERIALES

La resistencia de materiales es una rama de la mecánica que estudia las reacciones que aparecen en los sólidos cuando se ven sometidos a esfuerzos o sollicitaciones (cargas exteriores). Estudiaremos las deformaciones a que dan lugar, así como los cálculos que delimitan las características de un elemento sólido para soportar determinadas fuerzas.

## 2 ESFUERZOS

Cuando un cuerpo se ve sometido a la acción de una o varias fuerzas puede suceder: que se produzca el movimiento del cuerpo o que permanezca inmóvil.

Atendiendo a la manera en que se producen esos esfuerzos, pueden ser:

- **Esfuerzos estáticos o cargas estáticas:** se aplican gradualmente desde cero hasta el máximo, con a previa existencia de un contacto.
- **Esfuerzos dinámicos o carga dinámica:** se aplican con velocidad sobre la pieza. Pueden ser a su vez de *carga súbita* (existe un contacto previo, pero la carga se aplica en su valor máximo), *carga de choque libre* (caída libre de un cuerpo ya sea desde cero o distinta de cero) y *carga de choque forzado* (choque entre dos masas animadas con velocidades).

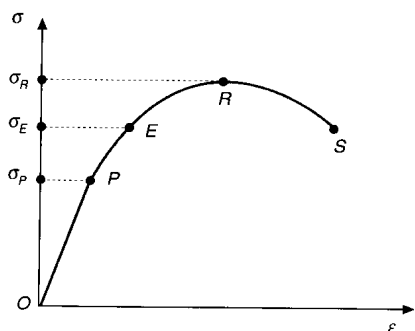
Cuanto mayor sea la fuerza que se aplica a un cuerpo, mayor será el esfuerzo a que está sometido y mayor será la deformación del mismo. Por el contrario, cuanto mayor sea el área de la sección del cuerpo, menor será el esfuerzo. El valor del esfuerzo se mide, por lo tanto en (kg/cm<sup>2</sup>) y se denomina **Tensión ( $\sigma$ )**.

$$(\sigma = F/S)$$

### 2.1 Diagrama esfuerzos / deformaciones. Ley de Hooke

Todos los materiales sometidos a esfuerzos crecientes, tienen un período inicial elástico en el que el alargamiento es proporcional a la tensión que lo origina. Llamaremos deformación o **alargamiento** unitario ( $\epsilon$ ) al cociente entre el alargamiento experimentado ( $\Delta L = L - L_0$ ) y su longitud inicial ( $L_0$ ).

$$\epsilon = \Delta L / L_0$$



Analizando el diagrama esfuerzos / deformaciones se observan dos partes diferenciadas:

- **Zona elástica:** Tramo (OE). Al cesar las tensiones, los materiales recuperan su longitud original.
- **Zona plástica:** Tramo ES. Las deformaciones se convierten en permanentes. Se rebasa la tensión del límite elástico  $\sigma_E$ .

**Figura 1.12.** Diagrama de tracción  $\epsilon - \sigma$ .

**Zona elástica:** dentro de esta zona se distinguen dos subzonas:

- Zona de proporcionalidad (OP): se trata de una recta, por lo tanto existe proporción entre la tensión y la deformación, cumpliendo la ley de Hooke.

Donde E es el **módulo de elasticidad o módulo de Young**.

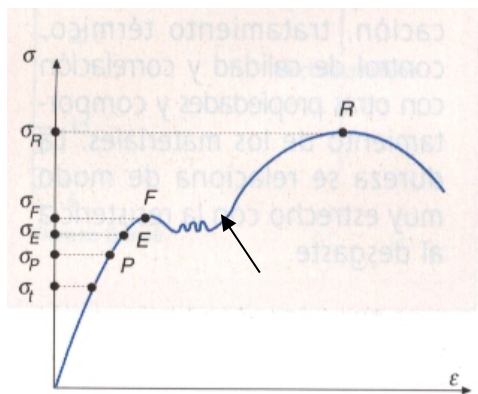
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

- Zona no proporcional (PE): se comporta elásticamente pero no existe relación de proporcionalidad entre tensión- deformación.

**Zona plástica:** dentro de esta zona se distinguen dos subzonas:

- Zona límite de rotura (SR) o deformación plástica uniforme: a pequeñas variaciones de tensión se producen grandes alargamientos y la curva se va haciendo más tendida. El límite de esta zona es el punto R, llamado **límite de rotura** y la tensión aplicada en ese punto es la **tensión de rotura  $\sigma_R$** .
- Zona de rotura (a partir de R) o de formación plástica localizada: el material sigue alargándose progresivamente hasta que se rompe la pieza.

Este comportamiento de los materiales se puede generalizar, pero existen algunas excepciones como en el acero, donde aparece una zona por encima del límite elástico donde se produce un alargamiento muy rápido bajo una tensión fluctuante (sin que varíe apenas) (zona FS), denominada zona de **Fluencia**.



- **Límite de proporcionalidad**  $\sigma_P$ : tensión a partir de la cual la deformación deja de ser proporcional a la tensión.
- **Límite de elasticidad**  $\sigma_E$ : tensión a partir de la cual las deformaciones dejan de ser reversibles.
- **Resistencia a la tracción**  $\sigma_R$ : máxima tensión que soporta.
- **Resistencia a la rotura**  $\sigma_U$ : es la tensión que soporta la probeta justo en el momento de romperse.
- **Trabajo de deformación**: es el área bajo la curva tensión-deformación y representa el trabajo que es necesario desarrollar para conseguir la rotura de la pieza.

- **Nota:** existe otro punto (S) donde señala la flecha (al final del tramo arrugado).

Diagrama de tracción del acero. Fluencia

## 2.2 Deformaciones elásticas

Todos los materiales en proceso de deformación pasan por tres estadios: empiezan deformándose elásticamente, luego la deformación se hace permanente o plástica y por último, se rompen.

Deformación elástica es aquella en la que el cuerpo vuelve a recobrar su forma si cesa el esfuerzo. A esta propiedad de los cuerpos se le llama elasticidad.

## 2.3 Proporcionalidad en las deformaciones elásticas

A efectos de cálculo y por seguridad, se recomienda trabajar siempre en la zona elástica y más en concreto en la zona de proporcionalidad, donde *las deformaciones son proporcionales a las tensiones que las producen*. (Ley de Hooke).

$$E = \sigma / \varepsilon$$

$$E = \text{constante} = \tan \alpha$$

Donde E es el **módulo de elasticidad o módulo de Young** y representa la pendiente de la curva tensión-deformación en la región elástica y se mide en Kp/cm<sup>2</sup>, Kp/mm<sup>2</sup> o N/m<sup>2</sup>.

## 2.4 Resistencia a la fatiga

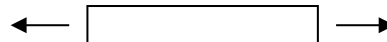
Los esfuerzos de fatiga son aquellos de valor variable entre un máximo y un mínimo, que repetidos de forma continua pueden llegar a romper la pieza (aunque este esfuerzo sea inferior a la resistencia de rotura). Esto significa que la resistencia de fatiga del material es inferior a su resistencia característica cuando el esfuerzo es constante.

Límite de fatiga: es el esfuerzo máximo que el material puede resistir con esfuerzo de fatiga sin llegar a romperse.

## 3 DEFORMACIONES

### 3.1 Esfuerzos longitudinales de tracción

Las fuerzas exteriores tienden a alargar el cuerpo. La deformación de la pieza se traduce en que las secciones normales al eje (planos paralelos que componen el material) se separan y se produce un alargamiento que provoca la disminución de la sección de la pieza.



El esfuerzo real a que está sometida una pieza durante el trabajo, se conoce con el nombre de *coeficiente de trabajo* (K). Llamaremos *coeficiente de seguridad* a la relación entre la carga de rotura del material y el coeficiente de trabajo.

$$K = \sigma_F / \sigma_{adm}$$

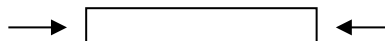
Donde  $\sigma_{adm}$  es la tensión admisible.

Para una pieza sometida a tracción simple el alargamiento total vendrá dado por la expresión:

$$\Delta L = (L \cdot N) / E \cdot S$$

### 3.2 Esfuerzos longitudinales de compresión

Las fuerzas exteriores tienden a acortar el cuerpo. Similar a la tracción pero de sentido contrario, por lo tanto acortará y aumentará la sección de la pieza.



En la compresión tiene mucha importancia la longitud de la pieza en relación con las dimensiones de la sección transversal, ya que si la longitud fuera excesiva se produciría el **Pandeo**.

### 3.3 Variación de volumen. Coeficiente de Poisson

Cuando se somete una pieza a tracción o compresión, se produce una variación en la sección de la pieza. En la zona elástica, y siempre que los materiales sean homogéneos e isótropos, la deformación unitaria lateral, es proporcional a la deformación unitaria axial. A la constante de proporcionalidad ( $\mu$ ), se le conoce como *coeficiente de Poisson* y es un valor característico de cada material.

Como las dimensiones de una pieza sometida a tracción o a compresión varían, lo hará también su volumen.

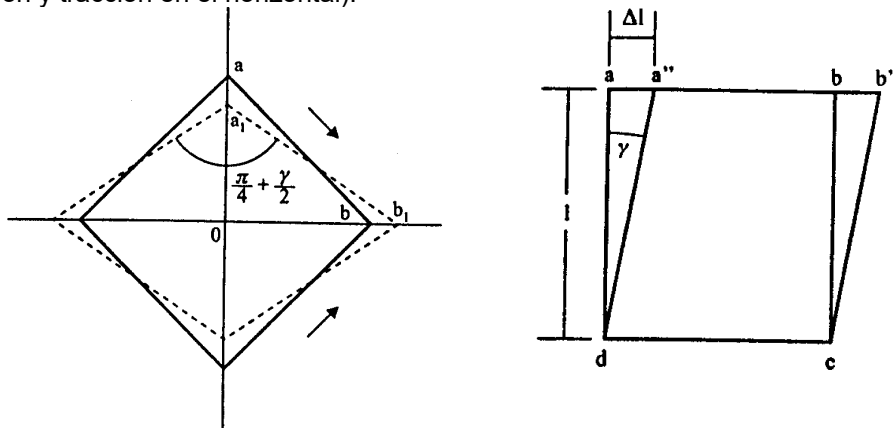
$$\Delta V/V_0 = (L - \Delta L/r_0)^2 * (L + \Delta L/L_0)^2 - L$$

- $\Delta V$ , es la variación de volumen.
- $V_0$ , volumen inicial =  $\pi * r_0^2 * L_0$ .
- $\Delta L$ , variación de longitud.
- $r_0$ , radio inicial.

Esta expresión es válida tanto para compresión como para tracción.

### 3.4 Cortadura o cizalladura

Es el esfuerzo que soporta una pieza cuando sobre ella actúan fuerzas contrarias. Como observamos en la figura, la pieza cuadrada, se convierte en un rombo tras el esfuerzo cortante (en el eje vertical se aplica compresión y tracción en el horizontal).



Ninguno de los lados sufre variación de longitud, pero se produce una variación de su forma, por lo tanto podemos afirmar que se produce una variación en la sección de la pieza.

En la cortadura pura, podemos decir que la relación ( $\epsilon = \Delta L/L$ ), representa un ángulo ( $\gamma$ ).

$$\gamma = \epsilon/G, \text{ de donde } L/G = (2 * (L + \mu)) / E$$

Al valor  $G$  se le conoce como *módulo de elasticidad transversal*, y se expresa en  $\text{kg/cm}^2$ .

### 3.5 Torsión

Se produce cuando en ambos extremos de una pieza actúan fuerzas que tienden a retorcerla (actúan momentos iguales y contrarios). El eje de la pieza coincide con el eje de giro.

En el caso de una barra de sección circular de radio  $R$ , sometida a dos momentos  $M_T$  en sus extremos, tenemos:

- La distorsión (o corrimiento) ( $\gamma$ ) que se produce entre las dos secciones separadas entre sí de la distancia unidad será:

$$\gamma = R * \theta$$

- Para que haya equilibrio entre las fuerzas externas (par de momentos) y las internas: Donde  $I_P$  es el momento de Inercia polar (momento de inercia respecto al eje de la pieza).

$$M_T = G * \theta * I_P$$

- El ángulo de torsión ( $\theta$ ) por unidad de longitud es directamente proporcional al momento torsor  $M_T$  e inversamente proporcional al producto ( $G * I_P$ ) que podemos considerar como el *módulo de rigidez a la torsión*.

- La tensión cortante ( $\xi$ ) máxima será:

$$\xi = 2 * M_T / \pi * R^3$$

### 3.6 Flexión

El esfuerzo de flexión es un esfuerzo que tiende a curvar el cuerpo. Debemos considerarlo como un esfuerzo compuesto en el que interviene un esfuerzo de tracción y otro de compresión.

Analizaremos el caso más común de un elemento apoyado sobre sus extremos: cada apoyo ejerce una fuerza hacia arriba denominada *Reacción del apoyo*.

- Aunque dos reacciones tengan valores distintos, la suma de ambas ha de ser igual que las fuerzas que producen la flexión. 1ª Ley de equilibrio de fuerzas:

$$\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0, \Sigma F_z=0$$

- *Momento de una fuerza con respecto a un determinado punto* es el producto de la intensidad de la fuerza por la distancia al punto considerado. 2ª Ley de equilibrio de fuerzas:

$$\Sigma M=0$$

- Además, y como norma derivada de esta regla, ha de ser igual la suma de los momentos situados a la izquierda de ese punto y la suma de los momentos situados a la derecha. Este valor es el *llamado momento flector en el punto* (suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan a uno y otro lado).

A la deformación en las piezas flexadas es lo que se denomina flecha y la podemos definir como la distancia en el punto más doblado de la pieza respecto a su situación de reposo.

Podemos encontrar las vigas sometidas a flexión en diferentes situaciones de comportamiento:

- Apoyada (sus dos extremos sobre apoyos)
- Empotrada: se dan tres casos:
  - En voladizo (no de sus extremos empotrados y el otro libre).
  - Semi-empotrada (Un extremo empotrado y otro apoyado).
  - Bi-empotrada (los dos extremos empotrados).

### 3.7 Pandeo

Es un caso particular de flexión que tiene lugar cuando la dirección del esfuerzo, en vez de ser perpendicular a la pieza, sigue el eje de la misma, provocando compresión y doblando con ello la pieza. Aparece cuando la longitud de la pieza es grande con respecto a su sección.

A parte de la longitud influyen la forma de la sección, el material de la pieza y la intensidad de la fuerza aplicada. Todos estos factores se relacionan entre sí mediante una expresión matemática conocida como *Fórmula de Euler* para el pandeo:

Donde:

- P, es la fuerza que produce el pandeo.
- E, módulo de elasticidad del material.
- I, momento de inercia de la sección.
- L, longitud de la pieza.

$$P = \pi^2 E I / L^2$$

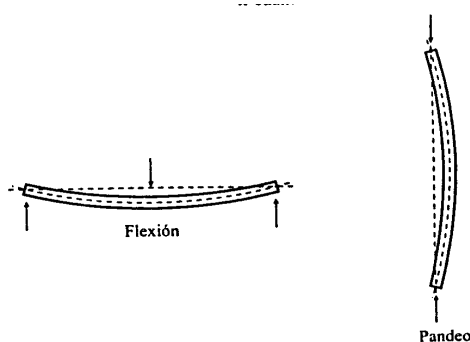
Lo que resulta más práctico es calcular la sección necesaria para que no se produzca pandeo, para ello, basta despejar el valor (I) de la fórmula.

Para prever circunstancias desconocidas y para reforzar la seguridad, es conveniente añadirle a la expresión, un coeficiente de seguridad (K), con lo que la expresión queda:

$$I = P K^2 L^2 / \pi^2 E$$

No se puede tomar como valor de longitud (L), el mismo valor de la longitud total de la pieza, puesto que el doblado no se produce de forma uniforme. Para cada caso tenemos:

- Pieza en voladizo:  $L_F = 2L$
- Empotrada-articulada:  $L_F = 2/3L$
- Empotrada-empotrada:  $L_F = 1/4L$



## 4 VIGAS

Es el elemento de forma prismática cuya longitud es mucho mayor que su sección transversal. Los apoyos que sustentan las vigas pueden ser de diferente manera, dando lugar a diferentes posibilidades de movimiento (respecto al plano horizontal (x), al vertical (Y) y giro alrededor de un eje perpendicular al plano XY. Esto será lo que llamamos grados de libertad y deben ser anulados en los puntos de apoyo para que la viga no se mueva.

Tipo de apoyos:

- Apoyo articulado móvil: permite desplazamiento (en el eje Y) y el giro. Se grafía con una rótula o articulación con rodillos cilíndricos. Impide el movimiento en el eje X. (Una incógnita)
- Apoyo articulado fijo: permite sólo el giro alrededor del eje perpendicular al plano. Se grafía con una articulación cilíndrica. Impide los desplazamientos en el eje X e Y. (Dos incógnitas)
- Apoyo empotrado: Impide los dos desplazamientos y el giro (tres incógnitas). Se grafía empotrada.

### 4.1 Vigas isostáticas

Las ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas son:  $\sum F_x=0$ ,  $\sum F_y=0$ ,  $\sum M=0$

Aplicando estas ecuaciones podemos determinar las incógnitas de las reacciones en las vigas. Cuando el número de incógnitas de las reacciones es igual al número de ecuaciones que podemos plantear, el problema es estáticamente determinado, entonces diremos que la *viga es isostática*. Ejemplo: viga en voladizo, viga articulada fija-articulada móvil.

### 4.2 Vigas hiperestáticas

Cuando el número de incógnitas en las reacciones es mayor al de ecuaciones, nos dará un problema indeterminado, entonces diremos que las *vigas son hiperestáticas*. Ejemplo: viga articulada móvil-empotrada y empotrada-empotrada.

### 4.3 Momentos flectores

Para determinar las tensiones que se producen en las vigas sometidas a flexión hay que analizar el momento flector y el esfuerzo cortante.

Para calcular el momento flector en una viga damos un corte ideal y lo aislamos. En el extremo de la viga correspondiente al corte aparecerá un momento y una resultante de fuerzas (de la parte aislada).

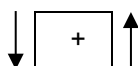
El momento de las fuerzas (de la parte que queda), respecto al centro de gravedad de dicha sección se le llama momento flector (M) y la resultante de las fuerzas de dicha parte se llama esfuerzo cortante (C).

Para una carga repartida:  $M=(P*L/2)*x - (P*x^2/2)$

$$C=P*L/2 - (P*x)$$

x, distancia al corte.  
L, longitud total de viga.

El criterio de signos será:

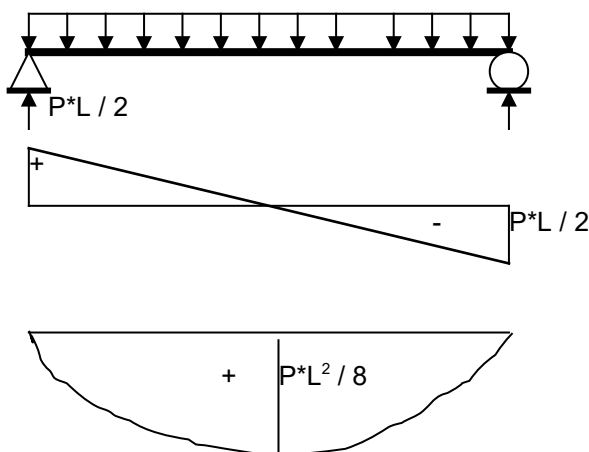


Si sumamos los valores correspondientes a las fuerzas exteriores situadas a la izquierda y derecha (ambos lados separados), han de anularse, ya que la viga está en equilibrio.

### 4.4 Diagrama de momentos flectores y esfuerzos cortantes

Una viga sometida a esfuerzos exteriores tendrá un esfuerzo cortante C y un momento flector M, que variará en función de la distancia x.

Para el esfuerzo cortante y para el momento el diagrama es:



Viga con carga repartida ( $P=Kg/ml$ ).  
Apoyo móvil – apoyo fijo.  
Reacciones en apoyos ( $P*L/2$ )

Diagrama esfuerzo cortante.  $C=P*L/2 - (P*x)$

Diagrama momento flector.  $M=(P*L/2)*x - (P*x^2/2)$ .  
El momento máximo coincide cuando el cortante se anula (para  $x= L/2$ ).

## 5 DEFORMACIÓN DE LAS VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

El análisis de la deformación de una viga flectada es muy importante en el estudio de los sistemas hiperestáticos. Al proyectar una viga es fundamental que su deformación no sobrepase de límites determinados. Así, en construcción, se establece un valor límite de la flecha o corrimiento vertical máximo.

El comportamiento que tiene la viga sometida a flexión y el valor que la flecha toma en cada punto se determina mediante dos métodos:

### 5.1 Ecuación diferencial de la línea elástica

Supongamos una viga en equilibrio compuesta por planos paralelos perpendiculares a su eje longitudinal. Para determinar la naturaleza de la variación de las fuerzas consideramos:

- Que la viga está formada por infinidad de fibras delgadas longitudinales,
- Que estas fibras actúan independientemente,
- Que el material sigue la Ley de Hooke y que el módulo de elasticidad en tracción y compresión son iguales.

Antes de aplicar la carga, las secciones de la viga son paralelos entre sí (planos paralelos), pero después de someterla a flexión se produce un giro que ocasiona la curvatura de la viga. Las fibras superiores están sometidas a compresión, y las fibras inferiores están a tracción.

Llamaremos *superficie neutra*, la superficie en la que las fibras no sufren ninguna deformación y a su intersección con un plano paralelo (o sección) cualquiera *eje neutro*.

La curvatura en un punto cualquiera de la curva que representa la viga deformada (para deformaciones pequeñas), se expresa mediante la fórmula:

$$M = E \cdot I \cdot (d^2y/dx^2)$$

Esta expresión se conoce como *ecuación diferencial de la curva deformada de una viga cargada con fuerzas laterales*. Esta ecuación tiene dos limitaciones: se ha supuesto que la viga esté trabajando en el campo elástico ( $\sigma < \sigma_E$ ) y se ha hecho teniendo en cuenta que las deformaciones son pequeñas.

### 5.2 Teoremas de Mohr

Son esenciales para el cálculo de vigas en general y muy prácticos. Son dos:

- El ángulo ( $\delta_{a,b}$ ) comprendido entre las tangentes en dos puntos cualesquiera a y b de la línea elástica, es igual al área del trozo correspondiente del diagrama de momentos flectores dividida por el módulo de rigidez.

$$\delta_{a,b} = \int (M \cdot d_x / E \cdot I)$$

Siendo  $\int$ , la integral.  
 $d_x$ , derivada de  $x$ .

- La ordenada de un punto b de la elástica respecto a la tangente en otro punto a es igual al momento estático de la superficie de momentos flectores comprendida entre las ordenadas de ambos puntos, tomando este momento estático con relación al punto b, primeramente considerado, dividido por el módulo de rigidez  $E \cdot I$ .

$$bc = \int (1/(E \cdot I)) \cdot (M \cdot d_x) \cdot (x_b - x)$$

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>RESISTENCIA DE MATERIALES.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ESFUERZOS.....</b>	<b>1</b>
2.1	DIAGRAMA ESFUERZOS / DEFORMACIONES. LEY DE HOOKE.....	1
2.2	DEFORMACIONES ELÁSTICAS.....	2
2.3	PROPORCIONALIDAD EN LAS DEFORMACIONES ELÁSTICAS.....	2
2.4	RESISTENCIA A LA FATIGA.....	2
<b>3</b>	<b>DEFORMACIONES.....</b>	<b>2</b>
3.1	ESFUERZOS LONGITUDINALES DE TRACCIÓN.....	2
3.2	ESFUERZOS LONGITUDINALES DE COMPRESIÓN.....	2
3.3	VARIACIÓN DE VOLUMEN. COEFICIENTE DE POISSON.....	3
3.4	CORTADURA O CIZALLADURA.....	3
3.5	TORSIÓN.....	3
3.6	FLEXIÓN.....	4
3.7	PANDEO.....	4
<b>4</b>	<b>VIGAS.....</b>	<b>5</b>
4.1	VIGAS ISOSTÁTICAS.....	5
4.2	VIGAS HIPERESTÁTICAS.....	5
4.3	MOMENTOS FLECTORES.....	5
4.4	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES.....	5
<b>5</b>	<b>DEFORMACIÓN DE LAS VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN.....</b>	<b>6</b>
5.1	ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA LÍNEA ELÁSTICA.....	6
5.2	TEOREMAS DE MOHR.....	6